

Θέματα

1. (α) Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - t \cos(ty), & t \in [0, 2], \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ναδειχθεί ότι η $f(t, y) = 1 - t \cos(ty)$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς τη μεταβλητή y και να εκτιμηθεί η σταθερά, L . Έχει το πρόβλημα αρχικών τιμών μοναδική λύση; (1.25 μονάδες)

(β) Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \geq 0, \lambda < 0 \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

(α) Με τη βοήθεια του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών να εκτιμήσετε το διάστημα απόλυτης ευστάθειας για τη μέθοδο του Euler και για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. (ii) Να σχεδιάσετε την περιοχή απόλυτης ευστάθειας για τις δύο παραπάνω μεθόδους (1.25 μονάδες).

2. (α) Να δείξετε ότι η μέθοδος Runge-Kutta με μητρώο: $\begin{array}{c|c} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline 1 & \end{array}$ έχει τάξη ακρίβειας ένα (1.2 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι μια μέθοδος Runge-Kutta έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1$ αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^q b_i = 1$. Πώς

καλείται η μέθοδος Runge-Kutta αν ισχύει ότι $\sum_{i=1}^q b_i = 1$; (1.3 μονάδες)

3. (α) Πότε μια μέθοδος Runge-Kutta ονομάζεται αλγεβρικά ευσταθής; (ii) Να δείξετε ότι η μέθοδος

Runge-Kutta με μητρώο: $\begin{array}{cc|c} \frac{3}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \end{array}$ είναι αλγεβρικά ευσταθής (1.25 μονάδες).

(β) Προσδιορίστε τα $\alpha_i, i = 0, 1, 2$, ώστε η μέθοδος:

$$\alpha_2 y^{n+2} + \alpha_1 y^{n+1} + \alpha_0 y^n = h f^{n+2}, \quad (3)$$

να έχει τάξη ακρίβειας δύο. Είναι ευσταθής η μέθοδος που προκύπτει; (1.25 μονάδα)

4. (α) Να διατυπώσετε τον ορισμό της B-ευστάθειας προσεγγιστικής μεθόδου για το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.2 μονάδα):

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & t \in [\alpha, \beta], \\ y(\alpha) = y_0. \end{cases} \quad (4)$$

(β) Θεωρήστε το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (5)$$

Να δείξετε ότι η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής μέθοδος (1.3 μονάδες).